

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Γωνίες αντίθετες $(-\omega, \omega)$

$\sin(-\omega) = -\sin\omega$, οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αντίθετοι

2.

Γωνίες παραπληρωματικές $(180^\circ - \omega, \omega)$

(άθροισμα 180°)

$\sin(-\omega) = \sin\omega$, οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αντίθετοι.

3.

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180° $(180^\circ + \omega, \omega)$

(διαφορά 180°)

$$\sin(180^\circ + \omega) = -\sin\omega$$

$$\sin(180^\circ + \omega) = -\sin\omega$$

$$\cos(180^\circ + \omega) = -\cos\omega$$

$$\cos(180^\circ + \omega) = -\cos\omega$$

4.

Γωνίες συμπληρωματικές $(90^\circ - \omega, \omega)$

(άθροισμα 90°)

Εναλλάσσουν $\sin \leftrightarrow \cos$ και $\tan \leftrightarrow \cot$

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μνημονικός κανόνας

1^η ομάδα

$$\begin{array}{c} -\omega \\ 180^\circ \pm \omega \\ 360^\circ \pm \omega \end{array}$$

2^η ομάδα

$$\begin{array}{c} 90^\circ \pm \omega \\ 270^\circ \pm \omega \end{array}$$

παραμένει ο τρ. αριθμός

εναλλάσσει ημ $\leftrightarrow$ συν και εφ $\leftrightarrow$ σφ

Τέλος, και στις δύο ομάδες μας απασχολεί το πρόσημο θεωρώντας ότι το ω είναι μικρό θετικό τόξο

Π.χ $\sin(180^\circ + \omega) = ;$

Είμαστε στην πρώτη ομάδα, άρα παραμένει συνω.

Το τόξο $180^\circ + \omega$ (είναι $180^\circ +$ κάτι), δηλαδή τελειώνει στο τρίτο τεταρτημόριο, όπου το συνημίτονο είναι αρνητικό.

Άρα $\sin(180^\circ + \omega) = -\sin\omega$

Π.χ $\cos(270^\circ - \omega) = ;$

Είμαστε στη δεύτερη ομάδα, άρα γίνεται σφω

Το τόξο $270^\circ - \omega$, (είναι $270^\circ -$ κάτι), τελειώνει στο τρίτο τεταρτημόριο, όπου η εφαπτομένη είναι θετική

Άρα $\cos(270^\circ - \omega) = \sin\omega$

* Εννοείται ότι, το παραπάνω σκεπτικό δεν το παρουσιάζουμε στις ασκήσεις.

2.

Το (-) μπροστά από τριγωνομετρικό αριθμό

Το (-) μπροστά από ημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη « τρώγεται » με τα αντίθετα τόξα,

ενώ μπροστά από συνημίτονο « τρώγεται » με τα παραπληρωματικά.

$-\eta\mu\omega = \eta\mu(-\omega)$, $-\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi(-\omega)$, $-\sigma\phi\omega = \sigma\phi(-\omega)$

$-\sin\omega = \sin(180^\circ - \omega)$

3.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 1\text{ορθή}$)

$$\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma, \quad \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma, \quad \epsilon\varphi B = \sigma\varphi\Gamma, \quad \sigma\varphi B = \epsilon\varphi\Gamma$$

αφού είναι συμπληρωματικές.

4.

Στο τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$

$$\eta\mu(B+\Gamma) = \eta\mu A$$

$$\eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} = \eta\mu \frac{A}{2}$$

$$\epsilon\varphi(B+\Gamma) = -\epsilon\varphi A$$

$$\epsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\varphi \frac{A}{2}$$

$$\sigma\varphi(B+\Gamma) = -\sigma\varphi A$$

$$\sigma\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = \epsilon\varphi \frac{A}{2}$$

$$\alpha\varphi\acute{o}\upsilon \quad A + B + \Gamma = 180^\circ$$

$$\alpha\varphi\acute{o}\upsilon \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

i) $\eta\mu(360^\circ - \omega) =$

ii) $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) =$

iii) $\epsilon\varphi(270^\circ - \omega) =$

iv) $\sigma\varphi(-\omega) =$

Σχόλιο 1

Απάντηση

$-\eta\mu\omega$, $-\eta\mu\omega$, $\sigma\varphi\omega$, $-\sigma\varphi\omega$

2.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$\eta\mu(-780^\circ)$, $\sigma\upsilon\nu 1305^\circ$, $\epsilon\varphi \frac{14\pi}{3}$, $\sigma\varphi\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$,

Λύση

- $\eta\mu(-780^\circ) = -\eta\mu 780^\circ = -\eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = -\eta\mu 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 1305^\circ = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^\circ + 225^\circ)$
 $= \sigma\upsilon\nu 225^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\epsilon\varphi \frac{14\pi}{3} = \epsilon\varphi(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \epsilon\varphi \frac{2\pi}{3} = \epsilon\varphi(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$
- $\sigma\varphi\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi \frac{31\pi}{4} = -\sigma\varphi(7\pi + \frac{3\pi}{4})$
 $= -\sigma\varphi(6\pi + \pi + \frac{3\pi}{4})$
 $= -\sigma\varphi(\pi + \frac{3\pi}{4})$
 $= -\sigma\varphi \frac{3\pi}{4} = -\sigma\varphi(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1$

3.

- Να βρείτε ένα τόξο x , αν
- i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$
 - ii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$
 - iii) $\epsilon\varphi x = -\sqrt{3}$
 - iv) $\sigma\varphi x = -1$

Λύση

$$\text{i)} \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2} = -\eta\mu 30^\circ = \eta\mu(-30^\circ) \Rightarrow x = -30^\circ$$

Σχόλιο 2

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

$$\text{iii)} \quad \epsilon\varphi x = -\sqrt{3} = -\epsilon\varphi 60^\circ = \epsilon\varphi(-60^\circ) \Rightarrow x = -60^\circ$$

$$\text{iv)} \quad \sigma\varphi x = -1 = -\sigma\varphi 45^\circ = \sigma\varphi(-45^\circ) \Rightarrow x = -45^\circ$$

4.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 1\text{ορθή}$) να αποδείξετε ότι

$$\text{i)} \quad \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$$

$$\text{ii)} \quad \epsilon\varphi B \cdot \epsilon\varphi \Gamma = 1$$

Λύση

$$\text{i)} \quad \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma = 1$$

$$\text{ii)} \quad \epsilon\varphi B \cdot \epsilon\varphi \Gamma = \sigma\varphi \Gamma \cdot \epsilon\varphi \Gamma = 1$$

Σχόλιο 3

5.

Αν $\eta\mu(270^\circ - x) = \frac{1}{3}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του x .

Σχόλιο 1

Λύση

$$\text{Είναι } \eta\mu(270^\circ - x) = \frac{1}{3} \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{3}$$

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \eta\mu x = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{Επειδή όμως } 90^\circ < x < 180^\circ \text{ θα είναι } \eta\mu x > 0, \text{ οπότε } \eta\mu x = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\sqrt{8} \text{ και } \sigma\phi x = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

6.

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(400^\circ + \alpha) - \sigma\upsilon\nu(50^\circ - \alpha) = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \eta\mu(400^\circ + \alpha) &= \eta\mu(360^\circ + 40^\circ + \alpha) \\ &= \eta\mu(40^\circ + \alpha) \\ &= \eta\mu(90^\circ - 50^\circ + \alpha) \\ &= \eta\mu[(90^\circ - (50^\circ - \alpha))] \\ &= \sigma\upsilon\nu(50^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu(400^\circ + \alpha) - \sigma\upsilon\nu(50^\circ - \alpha) = 0$$